PROCEEDINGS OF IAM, V.8, N.1, 2019, pp.14-23

СИЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА*

Т.С. Гаджиев[1], С.Я. Алиев[2], М.Н. Кериммова[3]

[1]Институт Математики и Механика НАНА, Баку, Азербайджан
[2] Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: sardar_aliyev@yahoo.com

Резюме. Мы изучаем однозначную сильную (почти всюду) разрешимость первой краевой задачи для линейных недивергентных вырождающихся уравнений эллиптико-параболического типа. Получены априорные оценки обобщенных решений поставленной задачи. Получены оценки для модельного оператора, далее коэрцитивные оценки для обобщенного решения. После этого доказывается разрешимость задачи для модельного уравнения, наконец сильная разрешимость первой краевой задачи.

Ключевые слова: линейных недивергентных вырождающихся уравнений, разрешимость задачи.

AMS Subject Classification: 35J25.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $T\in(0,\infty)$, где $\Omega\subset R^n$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, первую краевую задачу для уравнения

$$Zu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+\psi(x,t)u_{tt}-u_t=f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma(Q_T)}=0, \tag{2}$$

где $\Gamma(Q_T)=(\partial\Omega\times[0,T])\cup\{(x,t):x\in\Omega,t=0\}$ – параболическая граница цилиндра Q_T, $\psi(x,t)$ весовая функция стремящаяся к нулю, коэффициенты $a_{ij}(x,t)$ вырождаются. Условия на них и правую часть будут сформулированы ниже. Пусть коэффициенты удовлетворяют следующим условиям: $\|a_{ij}(x,t)\|$ симметрическая матрица и для любых $(x,t)\in Q_T$ и $\xi\in R^n$ верно

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 09.10.2018

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2, \tag{3}$$

где γ - постоянная из полуинтервала $(0,1]$, $a_{ij}(x,t)$, $i, j=\overline{1,n}$ измеримые функции $(x,t)\in Q_T$, а $\omega(x)\in A_p$ - весовая функция из класса Макенхоупта (см. [1]), а

$$\psi(x,t)=\omega(x)\cdot\lambda(\rho)\cdot\varphi(T-t), \tag{4}$$

и выполняются условия: для $\rho=\rho(x)=dist(x,\partial\Omega)$,

$$\lambda(\rho)\ge 0,\ \lambda(\rho)\in C^1[0,diam\Omega],\ \text{и}\ |\lambda'(\rho)|\le p\sqrt{\lambda(\rho)}$$

$$\varphi(z)\in C^1[0,T],\varphi(z)\ge 0,\ \varphi'(z)\ge 0$$

$$\varphi(z)\ge\beta\cdot z\cdot\varphi'(z),\ \varphi(0)=\varphi'(0)=0, \tag{5}$$

здесь β и p положительные константы.

Рассмотрим модельный оператор

$$Z_0=\omega(x)\cdot\Delta+\psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}, \tag{6}$$

где $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $\psi(x,t)$ удовлетворяет условиям (4), (5). Всюду далее мы ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда $\psi(x,z)>0$ при $z>0$, для всех $x\in\Omega$. Если $\psi(x,z)\equiv 0$, тогда уравнение (1) – параболическое с вырождающейся главной частью и соответствующий результат о разрешимости первой краевой задачи следует из известных результатов [4]. Но если $\psi(x,z)=0$ при $z\in[0,z^0]$, тогда решения задачи (1), (2) может быть получено склейкой решения $u(x,t)$ первой краевой задачи в цилиндре Q_{z^0} и решения $v(x,t)$ первой краевой задачи для параболического уравнения в цилиндре $\Omega\times(z^0,T)$ с краевыми условиями $v(x,z^0)=u(x,z^0)$, $v|_{\partial\Omega\times[z^0,T]}=0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,T)$ и введем функцию $\psi_\varepsilon(x,z)$ и $\omega_\varepsilon(x)$ аналогично статье [2] .

Обозначим

$$q_\varepsilon(x,T)=\sup_{z\in[0,T]}\psi'_\varepsilon(x,z),\ q(x,T)=\sup_{z\in[0,T]}\psi'(x,z), \tag{7}$$

для почти всех $x \in \Omega$.

$\psi_\varepsilon(x,z)$ выбирается так, чтобы удовлетворялась оценка

$$q_\varepsilon(x,T) \le q(x,T). \tag{8}$$

Обозначим через $Q_T^R(x_0)$ – цилиндр $B_R(x_0)\times(0,T)$. Пусть $\overline{B}_R(x_0)\subset\Omega$. Скажем, что $u(x,t)\in A\left(Q_T^R(x_0)\right)$, если $u(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q}_T^R(x_0)\right)$, $u\big|_{t=0}=0$ и $\operatorname{supp}u\subset\overline{Q}_T^\rho(x_0)$ для некоторого $\rho\in(0,R)$.

Лемма 1. Пусть относительно коэффициентов оператора Z выполнены условия (3), а относительно весов (4)-(5), и условие Макенхоупта. Тогда для всякой функции $u(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q}_T\right)$, $u\big|_{\Gamma(Q_T)}=0$ существует $T_1(\gamma,\psi,\omega,n,\Omega)$ такое, что при $T<T_1(\gamma,\psi,\omega,n,\Omega)$ и любом $\tau\in[0,1]$ справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)} \le C_1(\gamma,\sigma,\psi,\omega,n,\Omega)\left\|Zu-\frac{\tau}{T}u\right\|_{L_2(Q_T)}.$$

Доказательство аналогично доказательству коэрцитивной оценки для оператора Z , проведенному **в** [3]**.**

В дальнейшем будем обозначать операторы $Z_0-\mu$ и $Z_\varepsilon-\mu$ через M_0 и M_ε соответственно.

Теорема 1. Пусть относительно $\omega(x)$ удовлетворяет условию Макенхоупта, а относительно $\psi(x,t)$ выполнены условия (4)-(5). Тогда существует T^0 такое, что при $T\le T^0$ первая краевая задача

$$M_0u = f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{9}$$

$$u\big|_{\Gamma(Q_T)}=0, \tag{10}$$

однозначно сильно разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)$ при всякой функции

$$f(x,t)\in L_2(Q_T).$$

Доказательство. В начале предположим, что $f(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q}_T^R\right)$. Пусть $v(x,t)$ обобщенное решение задачи

$$\omega(x)\cdot\Delta v - v_t = f(x,t),\ (x,t)\in Q_T$$

$$v\big|_{\Gamma(Q_T)}=0.$$

Известно, что такое решение существует, и согласно [2],

$$v(x,t)\in W_{2,\omega}^{2,2}\left(Q_T^R\right) \text{ и } \|v(x,t)\|_{W_{2,\omega}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}\le C_2(n,\Omega, f), \tag{11}$$

где $W_{2,\omega}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$ – банахово пространство функций, заданных на Q_T^R, с конечной нормой вида $W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$ при $\psi\equiv 1$. В силу того, что для $\varepsilon\in(0,T)$ функция $\psi_\varepsilon(x,z)\le 1$ заключаем, что

$$\|v(x,t)\|_{W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}\le C_3. \tag{12}$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_{2,\omega}^{2,2}\left(Q_T\right)$ обозначим пополнение множества всех функций из $C^\infty\left(\overline{Q}_T^R\right)$, обращающихся в нуль на ∂Q_T^R, по норме пространства $W_{2,\omega}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$, а через $u^\varepsilon(x,t)$ обозначим сильное (почти всюду) решение задачи Дирихле

$$M_\varepsilon u^\varepsilon(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T^R,$$

$$\left(u^\varepsilon(x,t)-v(x,t)\right)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,\omega}^{2,2}\left(Q_T^R\right).$$

Такое решение существует при всяком $\varepsilon>0$ в силу [2]. Ясно, что $\left(u^\varepsilon(x,t)-v(x,t)\right)\in W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$. Учитывая, что $v\big|_{\Gamma(Q_T)}=0$ получим, что $u^\varepsilon(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$. Кроме того, для $F_\varepsilon(x,t)=M_\varepsilon v$ с учетом (12), имеем

$$\|F_\varepsilon\|_{L_2\left(Q_T^R\right)}\le C_3(n,\Omega,T, f). \tag{13}$$

Из леммы 1 следует, что

$$\|u^\varepsilon-v\|_{W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}\le C_4\left(\|f\|_{L_2\left(Q_T^R\right)}+\|F_\varepsilon\|_{L_2\left(Q_T^R\right)}\right).$$

Тогда из (12), (13) заключаем

$$\|u^\varepsilon\|_{W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}\le C_{40}\|u^\varepsilon\|_{W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}\le C_5(\psi,\omega,n,\Omega,T, f). \tag{14}$$

Значит, семейство функций $\left\{u^\varepsilon(x,t)\right\}$ ограничено по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$ равномерно относительно ε. То есть, это семейство слабо компактно в $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$. А это, частности, значит, что существуют такие последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$ и функция $u_0(x,t)\in \overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$, что для любой функции $h(x,t)\in C^\infty\left(\overline{Q}_T^R\right)$

$$\lim_{k\to\infty}\left(M_0u^{\varepsilon_k},h\right)=\left(M_0u_0,h\right), \qquad (15)$$

где $\left(a,b\right)=\int\limits_{Q_T^R} abdxdt$. Но

$$\left(M_0u^{\varepsilon_k},h\right)=\left(\left(M_0-M_{\varepsilon_k}\right)u^{\varepsilon_k},h\right)+\left(M_{\varepsilon_k}u^{\varepsilon_k},h\right)=\left(\left(M_0-M_{\varepsilon_k}\right)u^{\varepsilon_k},h\right)+\left(f,h\right)$$

. (16)

Кроме того, учитывая (14), имеем

$$J\left(k\right)=\left|\left(M_0-M_{\varepsilon_k}\right)u^{\varepsilon_k},h\right|\le\left\|\left(\psi-\psi_{\varepsilon_k}\right)u_{tt}^{\varepsilon_k}\right\|_{L_2\left(Q\left(\varepsilon_k\right)\right)}\left\|h\right\|_{L_2\left(Q\left(\varepsilon_k\right)\right)}\le$$

$$\le 3\left\|u^{\varepsilon_k}\right\|_{W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}\left\|h\right\|_{L_2\left(Q\left(\varepsilon_k\right)\right)}\le 3C_6\left\|h\right\|_{L_2\left(Q\left(\varepsilon_k\right)\right)}, \qquad (17)$$

здесь $Q\left(\varepsilon\right)=\Omega\times\left(T-\varepsilon,T\right)$. Таким образом, имеем, что $J\left(k\right)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$. Из (15)-(17) следует, что $\left(M_0u_0,h\right)=\left(f,h\right)$, а значит, $M_0u_0=f\left(x,t\right)$ почти всюду в Q_T^R.

Теперь пусть $f\left(x,t\right)\in L_2\left(Q_T\right)$. Тогда существует такая последовательность $\left\{f_m\left(x,t\right)\right\}$, $m=1,2,\ldots$, что $f_m\left(x,t\right)\in C^\infty\left(\overline{Q}_T^R\right)$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|f_m-f\right\|_{L_2\left(Q_T^R\right)}=0$. Для всех натуральных m рассмотрим последовательность $\left\{u_m\left(x,t\right)\right\}$ сильных решений краевых задач

$$M_0u_m=f_m\left(x,t\right),\ \left(x,t\right)\in Q_R^T,$$

$$u_m\big|_{\Gamma\left(Q_T\right)}=0.$$

В силу ранее доказанного, для каждого m такая функция $\left\{u_m\left(x,t\right)\right\}$ существует. Используя оценку леммы для оператора Z_0 при $\tau=1$, получим

$$\left\|u_m\right\|_{W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}\le C_7\left\|f_m\right\|_{L_2\left(Q_T^R\right)}\le C_8\left(\psi,\omega,n,\Omega,T,f\right). \qquad (18)$$

Таким образом, последовательность $\left\{u_m\left(x,t\right)\right\}$ слабо компакта в $W_{2,\psi_\varepsilon}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$, то есть существует такая последовательность $\left\{m_k\right\}\in N$, $\lim\limits_{k\to\infty}m_k=\infty$ и функция $u\left(x,t\right)\in\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$, что для любой $h\left(x,t\right)\in C^\infty\left(\overline{Q}_T^R\right)$

$$\lim_{k\to\infty}\left(M_0u_{m_k},h\right)=\left(M_0u,h\right).$$

Но с другой стороны

$$\lim_{k\to\infty}\left(M_0u_{m_k},h\right)=\lim_{k\to\infty}\left(f_{m_k},h\right)=\left(f,h\right).$$

Поэтому $(M_0 u, h) = (f, h)$, а значит $M_0 u = f(x,t)$ почти всюду в Q_T^R. Таким образом доказано существование сильного решения задачи (9)-(10). Единственность решения следует из леммы 1. Теорема доказана.

Теперь можно перейти к доказательству основной теоремы.

Теорема 2. Пусть относительно коэффициентов оператора Z выполнены условия (3), для веса $\psi(x,t)$ (4)-(5), а для веса $\omega(x)$ условие Макенхоупта. Тогда при $T \le T^0$ первая краевая задача (1)-(2), однозначно сильно разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)$ для всякой функции $f(x,t) \in L_2(Q_T)$. Причем для решения $u(x,t)$ справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T^R)} \le C_9 \|f\|_{L_2(Q_T^R)}. \tag{19}$$

Доказательство. Оценка (19) и единственность решения вытекают из коэрцитивных оценок. Докажем существование решения. Рассмотрим семейство операторов

$$Z^{(\tau)} = (1-\tau) M_0 + \tau \cdot Z \text{, для } \tau \in [0,1]$$

Покажем, что множество E точек τ, для которых задача

$$Z^{(\tau)} u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T^R, \tag{20}$$

$$u\big|_{\Gamma(Q_T)} = 0, \tag{21}$$

однозначно сильно разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T^R)$ при всякой функции $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ непустой и одновременно открыто и замкнуто относительно отрезка $[0,1]$. Отсюда последует, что $E = [0,1]$ и в частности задача (20)-(21) разрешима при $\tau = 1$. То есть когда $Z^{(1)} = Z$. Из теоремы 2. сразу вытекает не пустота множества E. Докажем его открытость. Пусть $\tau_0 \in E$, а $\varepsilon > 0$ будет выбрано позже. Покажем, что задача (20)-(21) разрешима для всех $\tau \in [0,1]$. Рассмотрим τ_0 такие, что $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$. Задачу (20)-(21) можно переписать в эквивалентном виде

$$Z^{(\tau_0)} u = f(x,t) - \left(Z^{(\tau)} - Z^{(\tau_0)}\right) u,\ (x,t) \in Q_T^R, \tag{22}$$

и $u(x,t) \in W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T^R)$.

Введем в рассмотрение произвольную функцию $v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T^R)$ и краевую задачу

$$Z^{(\tau_0)}u = f(x,t) - \left(Z^{(\tau)} - Z^{(\tau_0)}\right)v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^R, \qquad (23)$$

где $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$.

Ясно, что

$$\left(Z^{(\tau)} - Z^{(\tau_0)}\right)v(x,t) \in L_2\left(Q_T^R\right).$$

Отметим, что для всех операторов $Z^{(\tau)}$ условия (3) выполняются с константами $\gamma'_{(\tau)} \geq \min\{\gamma, n\}$. Заметим, что из вышеуказанного и леммы 1. следует, что при $T \leq T^0$ для любого $\tau \in [0,1]$ и всякой функции $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$ верна оценка

$$\|u(x,t)\|_{\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)} \leq C_{10}\left\|Z^{(\tau)}u\right\|_{L_2\left(Q_T^R\right)}. \qquad (24)$$

В силу сделанного предположения краевая задача (23) имеет сильное решение $u(x,t)$ для любой функции $v(x,t) \in W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$.

Таким образом, определен оператор Φ, действующий из $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$ в $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$. Причем $u = \Phi v$. Этот оператор является сжимающим при ε выбранным соответствующим образом. Действительно, пусть

$v^{(i)}(x,t) \in W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$, $u^{(i)} = \Phi v^{(i)}$, $i = 1,2$.

Тогда учитывая равенство

$$\left(Z^{(\tau)} - Z^{(\tau_0)}\right) = (\tau - \tau_0)(Z - M_0),$$

заключаем, что $u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)$ есть сильное решение первой краевой задачи

$$Z^{(\tau_0)}\left(u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)\right) = (\tau - \tau_0)(Z - M_0)\left(v^{(1)}(x,t) - v^{(2)}(x,t)\right),$$

где $\left(u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)\right) \in \overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)$. Используя (24), получим

$$\left\|u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)\right\|_{W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)} = C_{11}|\tau - \tau_0|\left\|(Z - M_0)\left(v^{(1)}(x,t) - v^{(2)}(x,t)\right)\right\|_{L_2\left(Q_T^R\right)} \qquad (25)$$

С другой стороны

$$\left\|(Z - M_0)\left(v^{(1)}(x,t) - v^{(2)}(x,t)\right)\right\|_{L_2\left(Q_T^R\right)} \leq$$
$$\leq C_{12}(Z, n, \Omega, T)\left\|v^{(1)}(x,t) - v^{(2)}(x,t)\right\|_{W_{2,\psi}^{2,2}\left(Q_T^R\right)}.$$

Итак

$$\left\| u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t) \right\|_{W^{2,2}_{2,\psi}\left(Q^R_T\right)} \le C_{11} C_{12} \varepsilon_1 \left\| v^{(1)}(x,t) - v^{(2)}(x,t) \right\|_{W^{2,2}_{2,\psi}\left(Q^R_T\right)}.$$

Теперь выбирая $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} C_{11} C_{12}$, доказываем, что оператор Φ сжимающий. Отсюда следует, что у него есть неподвижная точка $u = \Phi v$ являющаяся сильным решением краевой задачи (22), а следовательно краевой задачи (20)-(21). Таким образом доказана открытость множества E. Покажем замкнутость множества E.

Пусть $\tau_k \in E$ такая последовательность, что $\lim\limits_{k \to \infty} \tau_k = \tau$. Для натуральных к обозначим через $u_{[k]}(x,t)$ решение первой краевой задачи

$$Z^{(\tau_k)} u_{[k]} = f(x,t),\ (x,t) \in Q^R_T,$$

$$u_{[k]}\Big|_{\Gamma(Q_T)} = 0.$$

Согласно (24), имеем

$$\left\| u_{[k]}(x,t) \right\|_{W^{2,2}_{2,\psi}\left(Q^R_T\right)} \le C_{13} \| f \|_{L_2\left(Q^R_T\right)}. \tag{26}$$

Итак, семейство функций $\left\{ u_{[k]}(x,t) \right\}$ слабо компактно в $W^{2,2}_{2,\psi}\left(Q^R_T\right)$, т.е. существует подпоследовательность натуральных чисел $\{k_i\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} k_i = \infty$ и функция $u(x,t) \in W^{2,2}_{2,\psi}\left(Q^R_T\right)$ такая, что для всякой $\tilde{\varphi}(x,t) \in C^{\infty}\left(\overline{Q}^R_T\right)$

$$\lim_{l \to \infty} \left(Z^{\left(\tau_{k_l}\right)} u_{[k_l]}, \tilde{\varphi} \right) = \left(Z^{(\tau)} u, \tilde{\varphi} \right). \tag{27}$$

Но

$$\left(Z^{\left(\tau_{k_l}\right)} u_{[k_l]}, \tilde{\varphi} \right) = \left(\left(Z^{(\tau)} - Z^{\left(\tau_{k_l}\right)} \right) u_{[k_l]}, \tilde{\varphi} \right) + \left(f, \tilde{\varphi} \right) = J_1(l) + J_2(l). \tag{28}$$

Кроме того, учитывая (26) и (27), имеем

$$J_1(l) = \left| \tau - \tau_{k_l} \right| \left| \left(Z - M_0 \right) u_{[k_l]}, \tilde{\varphi} \right| \le$$

$$\le \left| \tau - \tau_{k_l} \right| C_{13} \left\| u_{[k_l]} \right\|_{W^{2,2}_{2,\psi}\left(Q^R_T\right)} \left\| \tilde{\varphi} \right\|_{L_2(Q(\varepsilon_k))} \le C_{13} C_{14} \left| \tau - \tau_{k_l} \right| \| f \|_{L_2\left(Q^R_T\right)} \left\| \tilde{\varphi} \right\|_{L_2\left(Q^R_T\right)}, \tag{29}$$

Из (29) следует, что $J_1(l) = 0$

Далее из (27), (28) заключаем, что

$$\left(Z^{(\tau)} u, \tilde{\varphi} \right) = \left(f, \tilde{\varphi} \right)$$

т.е. $Z^{(\tau)} u = f$ почти всюду в Q^T_R. Тем самым показано, что $\tau \in E$, т.е. множество E замкнуто. Теорема доказана.

Авторы выражают глубокую блогадарность уважаемому рецензенту за указанные неточности и ценные замечания в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chanillo S., Wheeden R. Weighted Poincare and Sobolev inequalities. Amer. J. Math., 107, 1985,107, 1191-1226.
2. Gadjiev T.S., Kerimova M.N. On some estimations of solutions for degenerate elliptic-parabolic equations. Transactions of NAS of Azerb, 2013, v. XXXIII, 4, pp.57-72.
3. Gadjiev T.S., Kerimova M.N. Coercive estimate for degenerate elliptic-parabolic equations. Proc. of Ins. Math. And Mech. of NAS of Azerb, 2015, v. 41, 1, pp.123-134.
4. Олейник О.А. О гладкости решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений второго порядка. ДАН СССР, 1965, 163, 3, сс. 557-580.
5. Gadjiev T.S., Kerimova M.N. The solutions degenerate elliptic-parabolic equations. Journal of Advances in Matematics. 2013, vol 3, No 3, pp.218-235.

THE STRONG SOLVABILITY BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LINEAR NON-DIVERGENT DEGENERATE EQUATIONS OF ELLIPTIC-PARABOLIC TYPE

T.S. Gadjiev[1], S.Y. Aliev[2], M.N. Kerimova[3]

[1,3]Institute Mathematics and Mechanics of NANA, Baku, Azerbaijan
[2] Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: sardar_aliyev@yahoo.com

ABSTRACT

We study the unique strong (almost everywhere) solvability of the first boundary value problem for linear non-divergent degenerate equations of elliptic-parabolic type. The priori estimates of generalized solutions of the given problem are obtained. The estimates for the model operator, further the coercive estimates for the generalized solution are received. After that, the solvability of the problem for the model equation, finally the strong solvability of the first boundary value problem is proved.

Keywords: linear non-divergent degenerate equations the solvability of the problem.

References

1. Chanillo S., Wheeden R. Weighted Poincare and Sobolev inequalities. Amer. J. Math., 107, 1985,107, 1191-1226.

2. Gadjiev T.S., Kerimova M.N. On some estimations of solutions for degenerate elliptic-parabolic equations. Transactions of NAS of Azerb, 2013, v. XXXIII, 4, pp.57-72.
3. Gadjiev T.S., Kerimova M.N. Coercive estimate for degenerate elliptic-parabolic equations. Proc. of Ins. Math. And Mech. of NAS of Azerb, 2015, v. 41, 1, pp.123-134.
4. Oleynik O.A. O gladkosti resheniy vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh i parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka. DAN SSSR, 1965, 163, 3, ss. 557-580 ()
5. Gadjiev T.S., Kerimova M.N. The solutions degenerate elliptic-parabolic equations. Journal of Advances in Matematics. 2013, vol 3, No 3, pp.218-235.